

**Esame finale / secondo esonero**

Candidato: ..... Matricola: .....

*Il candidato si impegna, sul suo onore, a svolgere l'esame senza dare o ricevere aiuto.*

*Esame finale - Gli esercizi da (1) a (4) hanno lo stesso peso, per un valore totale di 36 punti*

*Secondo esonero – completate solo gli esercizi (3) e (4), per un valore totale di 36 punti*

*Lode – si ottiene se il punteggio e' superiore a 30.*

1) Fit dei dati (svolgere i calcoli e riportare i risultati fino alla seconda cifra decimale)

Fit i dati della tabella

(a) con una retta ( $y = ax + b$ ) – i parametri di questo modello sono dati

(b) con una parabola ( $y = ax^2 + bx + c$ ).

(c) Calcolate il valore del chi-quadrato per gradi di liberta' (assumendo che  $\sigma_i = 1$ ) per determinare quale dei due modelli descriva meglio i valori sperimentali.

$$\begin{aligned} x_i &= (-1 \ 0 \ 1 \ 2) \\ y_i &= (3 \ 4 \ 5 \ 5) \end{aligned} \tag{1}$$

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	$\chi_v^2$
Parabola				
Retta	<b>0.7</b>	<b>3.9</b>		

“Best fit model”: [ ] Retta; [ ] Parabola

2) Calcolate il polinomio di Taylor della funzione

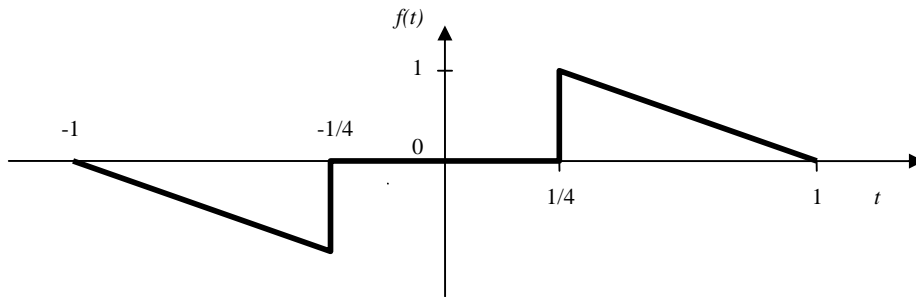
$$f(x) = \exp[1 - \sqrt{1+x}] \tag{2}$$

in  $x_0 = 0$  fino al termine in  $x^4$ . Approssimate la funzione  $\sqrt{1+x}$  con i primi due termini del suo sviluppo di Taylor ( $\sqrt{1+x} \approx a_0 + a_1x$ ). Calcolate il valore di  $f(0.25)$ . Qual'e' la precisione?

Polinomio	
Errore	
$f(0.25)$	

3) Calcolate la serie di Fourier in  $(-1, 1)$  di

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right) & -1 < x < -1/4 \\ 0 & -1/4 < x < 1/4 \\ 1 - \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) & 1/4 < x < 1 \end{cases} \quad (3)$$



4) Trovare la soluzione esatta della seguente equazione differenziale

$$x y' + (1-x) \cdot y = e^{2x} \quad \text{su } (0, +\infty) \quad \text{con } y(1) = 1 \quad (4)$$

Calcolare il valore di  $y$  in  $x = 1.5$  utilizzando la formula di Runge-Kutta

k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>

y esatta	y Runge-Kutta				

### Esame finale / secondo esonero

Candidato: ..... Matricola: .....

*Il candidato si impegna, sul suo onore, a svolgere l'esame senza dare o ricevere aiuto.*

*Esame finale - Gli esercizi da (1) a (4) hanno lo stesso peso, per un valore totale di 36 punti*

*Secondo esonero – completate solo gli esercizi (3) e (4), per un valore totale di 36 punti*

*Lode – si ottiene se il punteggio e' superiore a 30.*

5) Fit dei dati (svolgere i calcoli e riportare i risultati fino alla seconda cifra decimale)

Fit i dati della tabella

(a) con una retta ( $y = ax + b$ ) – i parametri di questo modello sono dati

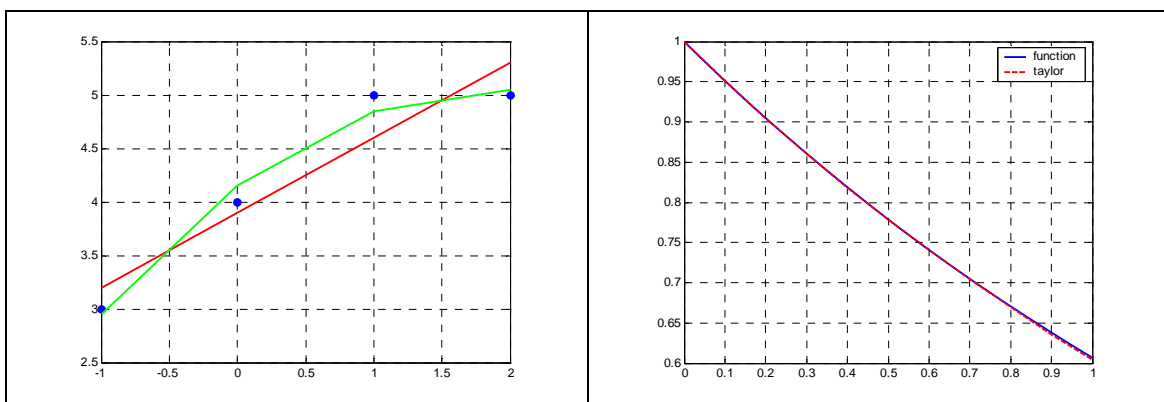
(b) con una parabola ( $y = ax^2 + bx + c$ ).

(c) Calcolate il valore del chi-quadrato per gradi di liberta' (assumendo che  $\sigma_i = 1$ ) per determinare quale dei due modelli descriva meglio i valori sperimentali.

$$\begin{aligned} x_i &= (-1 \ 0 \ 1 \ 2) \\ y_i &= (3 \ 4 \ 5 \ 5) \end{aligned} \quad (5)$$

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	$\chi_v^2$
Parabola	-0.25	0.95	4.15	0.05
Retta	<b>0.7</b>	<b>3.9</b>		0.15

“Best fit model”: [ ] Retta; [ X ] Parabola

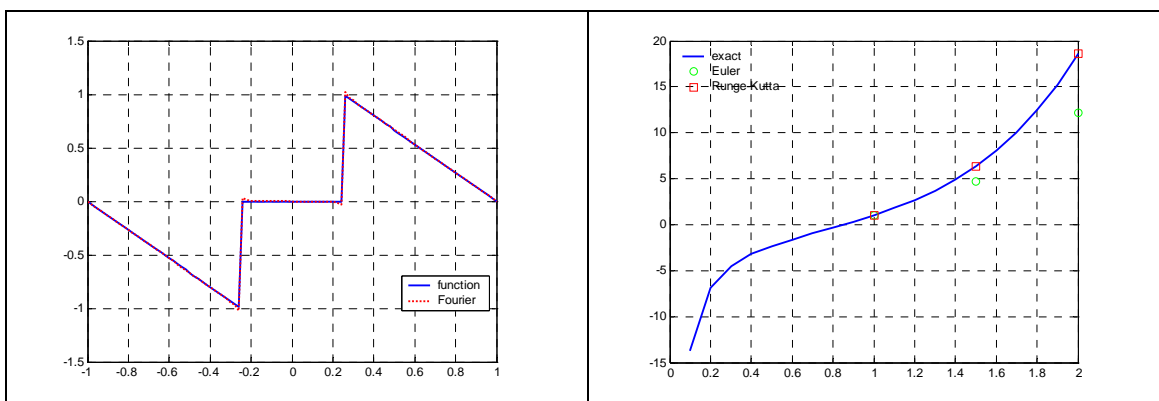


6) Calcolate il polinomio di Taylor della funzione

$$f(x) = \exp[1 - \sqrt{1+x}] \quad (6)$$

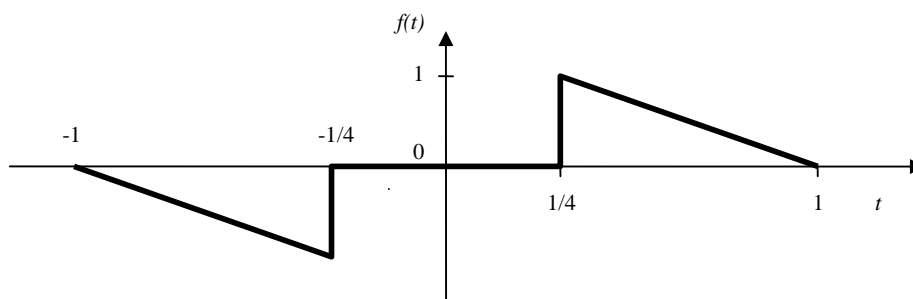
in  $x_0 = 0$  fino al termine in  $x^6$ . Approssimate la funzione  $\sqrt{1+x}$  con i primi due termini del suo sviluppo di Taylor ( $\sqrt{1+x} \approx a_0 + a_1x$ ). Calcolate il valore di  $f(0.25)$ . Qual'è la precisione?

Polinomio	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$ $\exp(-x/2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^6$
Errore	$ R_4  \leq \frac{x^4}{4!} \approx \frac{0.25^4}{24} \approx 10^{-4}$
$f(0.25)$	$f(0.25) = 0.8825$ $taylor(N = 3) = 0.8825$



7) Calcolate la serie di Fourier in  $(-1, 1)$  di

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right) & -1 < x < -1/4 \\ 0 & -1/4 < x < 1/4 \\ 1 - \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right) & 1/4 < x < 1 \end{cases} \quad (7)$$



$$b_n = \frac{8}{3} \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{3}{4} \cos(n\pi/4) + \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi} \right]$$

$$f(x) = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{3}{4} \cos(n\pi/4) + \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi} \right] \right\} \sin(n\pi x) \quad (8)$$

8) Trovare la soluzione esatta della seguente equazione differenziale

$$x y' + (1-x) \cdot y = e^{2x} \quad \text{su } (0, +\infty) \quad \text{con } y(1) = 1 \quad (9)$$

$$y = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x} \quad C = e^{-1} - e^1$$

Calcolare il valore di y in  $x = 1.5$  utilizzando la formula di Runge-Kutta

h	k1	k2	k3	k4
0.5	3.6945	5.1577	5.2309	7.7337

y esatta	y Runge-Kutta				
6.3678	6.3676				

*Calcoli***Esercizio (1)**

A = 18 8 6 8 6 2 6 2 4	b = 28 12 17
A = 1.0000 0.4444 0.3333 1.0000 0.7500 0.2500 1.0000 0.3333 0.6667	b = 1.5556 1.5000 2.8333
A = 1.0000 0.4444 0.3333 0.0000 0.3056 -0.0833 0.0000 -0.1111 0.3333	b = 1.5556 -0.0556 1.2778
A = 1.0000 0.4444 0.3333 0.0000 1.0000 -0.2727 0.0000 1.0000 -3.0000	b = 1.5556 -0.1818 -11.5000
A = 1.0000 0.4444 0.3333 0.0000 1.0000 -0.2727 0.0000 0.0000 -2.7273	b = 1.5556 -0.1818 -11.3182
A = 1.0000 0.4444 0.3333 0.0000 1.0000 -0.2727 0.0000 0.0000 1.0000	b = -0.2500 0.9500 4.1500

**Esercizio (3)**

La funzione  $f(x)$  e' dispari, quindi  $a_n = 0$ . Dalla simmetria della funzione si puo' vedere che  $a_0 = 0$ . La funzione puo' essere semplificata in

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(x+1) & -1 < x < -1/4 \\ 0 & -1/4 < x < 1/4 \\ \frac{4}{3}(1-x) & 1/4 < x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$a_0 = -\frac{4}{3} \left[ \int_{-1}^{-1/4} (x+1) dx - \int_{1/4}^1 (1-x) dx \right] = -\frac{4}{3} \left[ \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^{-1/4} - \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{1/4}^1 \right]$$

$$a_0 = -\frac{4}{3} \left[ \left( \frac{1}{32} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \right) \right] = 0$$

$$b_n = 2 \frac{4}{3} \int_{1/4}^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx = \frac{8}{3} \left[ \frac{(x-1) \cos(n\pi x)}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} \right]_{1/4}^1$$

$$b_n = \frac{8}{3} \left[ \frac{(x-1) \cos(n\pi x)}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2} \right]_{1/4}^1 = \frac{8}{3} \left[ 0 - \frac{\sin(n\pi)}{(n\pi)^2} + \frac{3 \cos(n\pi/4)}{4 n\pi} + \frac{\sin(n\pi/4)}{(n\pi)^2} \right]$$

**Esercizio (4)**

$$y' + \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \cdot y = \frac{e^{2x}}{x} \quad P = \frac{1}{x} - 1 \quad Q = \frac{e^{2x}}{x}$$

Il fattore di integrazione e'

$$\mu = \exp\left(\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx\right) = \exp(\ln(x) - x) = x e^{-x}$$

mentre la soluzione e'

$$y = \frac{e^x}{x} \int x e^{-x} \frac{e^{2x}}{x} dx + C \frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{x} \int e^x dx + C \frac{e^x}{x}$$