Esame di analisi numerica

Candidato: ………………………………………….. Matricola: ………………..

E-mail: ....

Il candidato si impegna, sul suo onore, a svolgere l'esame senza dare o ricevere aiuto.

Esame finale - Gli esercizi da (1) a (4) hanno lo stesso peso, per un valore totale di 32 punti
Lode – si ottiene se il punteggio e' superiore a 30.

1) Fit dei dati (svolgere i calcoli e riportare i risultati fino alla seconda cifra decimale)
Fit i dati della tabella
(**a**) con una retta ($y = ax + b$) – fit con pesi (weighted least square)
(**b**) con una retta ($y = ax + b$) – fit senza pesi

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ y_i &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma_i &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

	a	**b**
Retta con pesi		
Retta senza pesi		

2) Calcolate il polinomio di Taylor della funzione

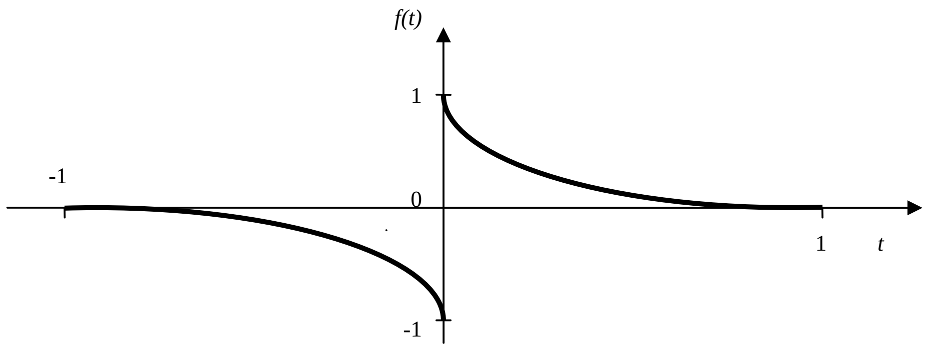
$$f(x) = \exp\left[1 - \cos(x)\right] \tag{2}$$

in $x_0 = 0$ fino al termine in x^4. Approssimate la funzione $\cos(x)$ con i primi due termini del suo sviluppo di Taylor ($\cos(x) \simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2$). Calcolate il valore di $f(0.25)$.
Qual'e' la precisione?

Polinomio	
Errore	
$f(0.25)$	

3) Calcolate la serie di Fourier in (-1, 1) di

$$f(x) = \begin{cases} -(1+x)^2 & -1 < x < 0 \\ (1-x)^2 & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{3}$$



4) Trovare la soluzione esatta della sequente equazione differenziale

$$\sin(x)\, y' + \cos(x) \cdot y = \sin(x) \cdot e^{2x} \quad \text{su } \left(\pi/4, +3\pi/4\right) \quad \text{con } y(\pi/4) = 1 \tag{4}$$

Calcolare il valore di y in $x = \dfrac{\pi}{4} + 0.5$ utilizzando la formula di Runge-Kutta

k_1	k_2	k_3	k_4

y esatta	y Runge-Kutta

Esame di analisi numerica

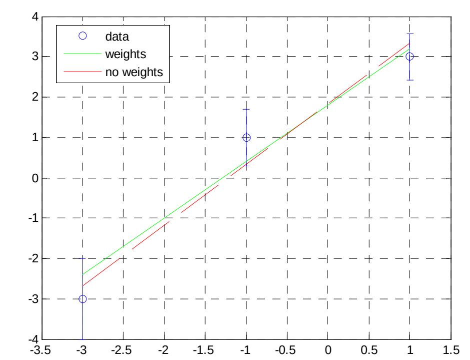
Candidato: ………………………………………….. Matricola: ………………..
Il candidato si impegna, sul suo onore, a svolgere l'esame senza dare o ricevere aiuto.

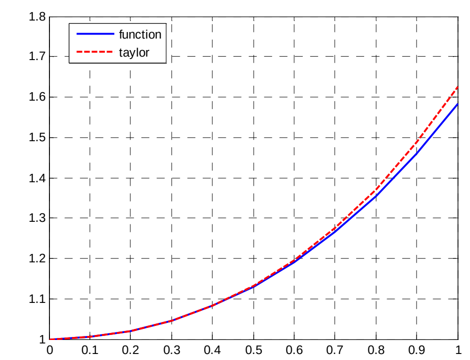
Esame finale - Gli esercizi da (1) a (4) hanno lo stesso peso, per un valore totale di 36 punti
Lode – si ottiene se il punteggio e' superiore a 30.

5) Fit dei dati (svolgere i calcoli e riportare i risultati fino alla seconda cifra decimale)
Fit i dati della tabella
(**a**) con una retta ($y = ax + b$) – fit con pesi (weighted least square)
(**b**) con una retta ($y = ax + b$) – fit senza pesi

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ y_i &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma_i &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

	a	**b**
Retta con pesi	1.40	1.80
Retta senza pesi	1.50	1.83





6) Calcolate il polinomio di Taylor della funzione

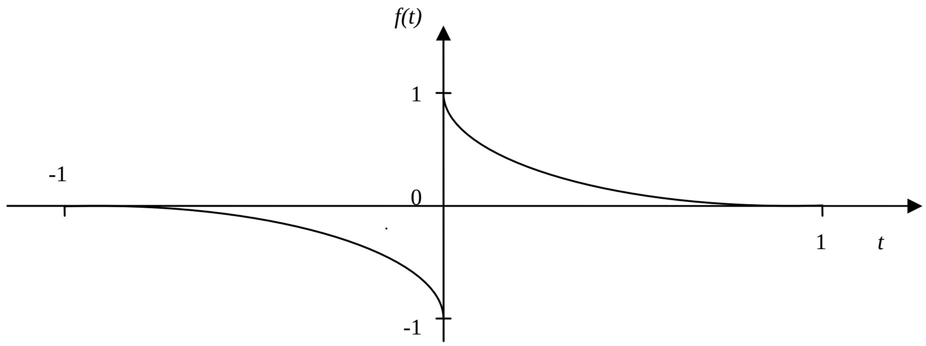
$$f(x) = \exp\left[1 - \cos(x)\right] \tag{6}$$

in $x_0 = 0$ fino al termine in x^4. Approssimate la funzione $\cos(x)$ con i primi due termini del suo sviluppo di Taylor ($\cos(x) \simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2$). Calcolate il valore di $f(0.25)$.
Qual'e' la precisione?

Polinomio	$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \exp\left(x^2/2\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$
Errore	$\lvert R_4 \rvert \le \frac{x^4}{8} \approx \frac{0.25^4}{8} \approx 10^{-4}$
$f(0.25)$	$f(0.25) = 1.0316 \qquad taylor(N=3) = 1.0317 \qquad error = 1.6 \cdot 10^{-4}$

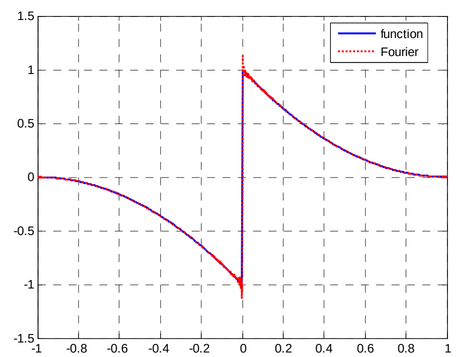
7) Calcolate la serie di Fourier in (-1, 1) di

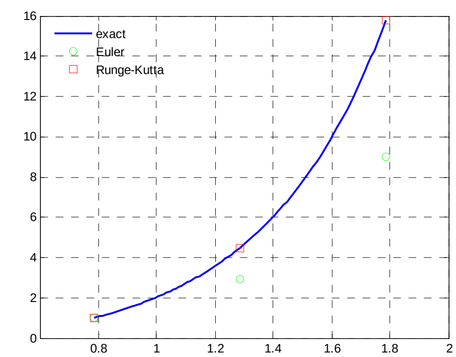
$$f(x) = \begin{cases} -(1+x)^2 & -1 < x < 0 \\ (1-x)^2 & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{7}$$



$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \frac{2}{(n\pi)^2}\left(1-(-1)^n\right)\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left[1 - \frac{2}{(n\pi)^2}\left(1-(-1)^n\right)\right]\sin(n\pi x) \tag{8}$$





8) Trovare la soluzione esatta della sequente equazione differenziale

$$\sin(x)\, y' + \cos(x)\cdot y = \sin(x)\cdot e^{2x} \qquad \text{su } \left(\pi/4, +3\pi/4\right) \qquad \text{con } y(\pi/4) = 1 \tag{9}$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left[C - \frac{1}{5}e^{\,2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{\,2x}\sin x\right] \qquad C = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

Calcolare il valore di y in $x = \frac{\pi}{4} + 0.5$ utilizzando la formula di Runge-Kutta

k_1	k_2	k_3	k_4
1.9052	3.3864	3.1668	5.9268

esatta		Euler		Runge-Kutta	
X	Y	X	Y	X	Y
0.7854	1.0000	0.7854	1.0000	0.7854	1.0000
1.2854	4.4911	1.2854	2.9052	1.2854	4.4897
1.7854	15.7948	1.7854	9.0171	1.7854	15.7905